МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Моделирование вероятностных систем

Лекция 5

преподаватель кафедры ТМСИ

Губин Максим Владимирович

Вероятностные математические модели

Воздействия на ТО носят случайный характер, фазовые координаты – **вероятностные функции**.

Эксперимент ведет себя каждый раз по-разному.

Массовые случайные явления обладают свойством **статистической устойчивости**.

Методы теории вероятности применимы только к экспериментам со статической устойчивостью.

Результаты опытов – случайная величина.

Случайные величины могут быть ограниченными и неограниченными, дискретными и непрерывными.

Пример

При обработке детали на станке можно поддерживать постоянными скорость и глубину резания, подачу, марку материала и т.д. Однако однородность материала, первоначальные размеры заготовки, вибрации станка и т.д. изменяются в определенных, не всегда известных пределах.

Поэтому при подобном опыте **возможны различные конечные результаты**, которые нельзя предсказать до его проведения.

Но благодаря постоянным условиям опыта и многократным его повторениям **обеспечивается статистическая устойчивость** и в результате можно определить в среднем, какая часть продукции будет годной, а какая нет.

Определения

Факт, который может произойти, в теории вероятностей называются **случайным событием**.

Событие, которое при заданных условиях проведения опытов обязательно произойдет, называется **достоверным**. Если оно не может произойти, его называют **невозможным**.

Количественная мера – **вероятность**:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N},$$

где *N* – число повторений опыта. Если А достоверно, то P(A) = 1. Если А невозможно, то P(A) = 0.

События А и В называются **статистически независимыми**, если вероятность их совместного наступления равна произведению вероятностей этих событий: P(AB)=P(A)P(B). В противном случае события А и В **статистически зависимы**.

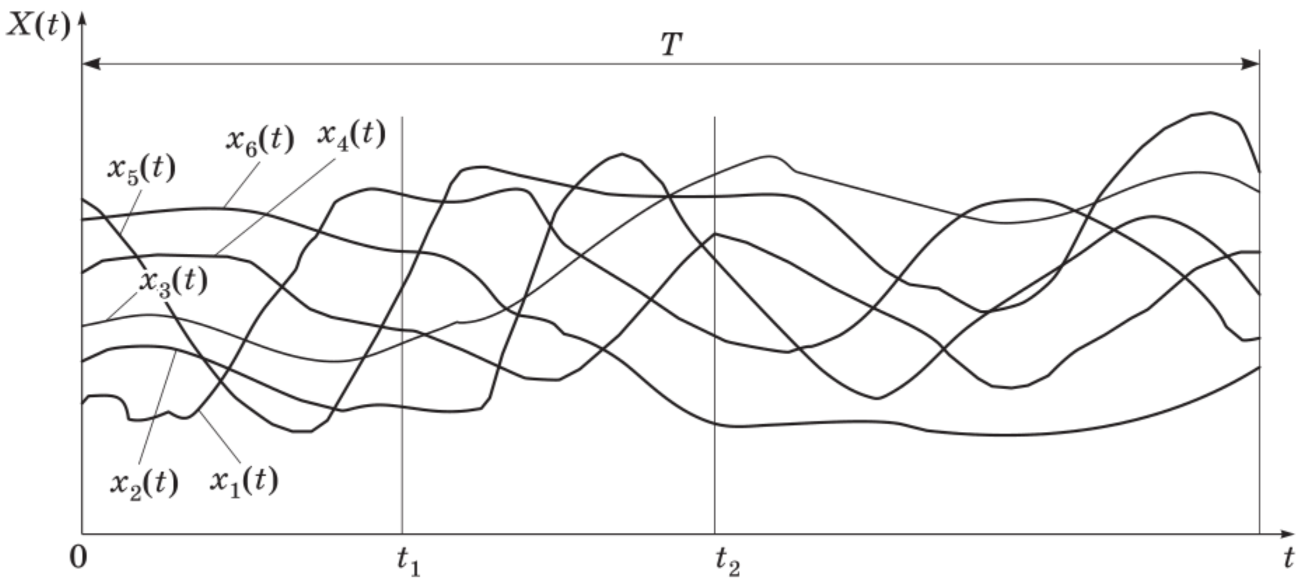
Условная вероятность события А, от события В: P(A|B).

Обозначения

Пусть X, Y, Z (большими буквами) – случайные величины,
x, y, z (маленькими буквами) – конкретные реализации случайных величин.

R_X – множество всех значений случайной величины X (область возможных значений).

На практике большинство величин являются ограниченными.



Ансамбль одномерной случайной величины X(t), реализации $x_i(t)$, $i = 1\ldots N$ на интервале *T*. При $t=t_1$ получаем сечение $X_1, X_2, \ldots, X_N$ случайной функции X(t).

Внешняя среда

Воздействие внешней среды на ТО носит случайный характер.

Необходимо оценивать это воздействие.

Моделировать это воздействие с заданными характеристиками.

Распределение вероятностей

События A рассматриваются как множества

$$A \epsilon \Omega, \text{где } \Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m).$$

Каждому событию A, как точке пространства Ω, ставится в соответствие его вероятность P(A), тогда

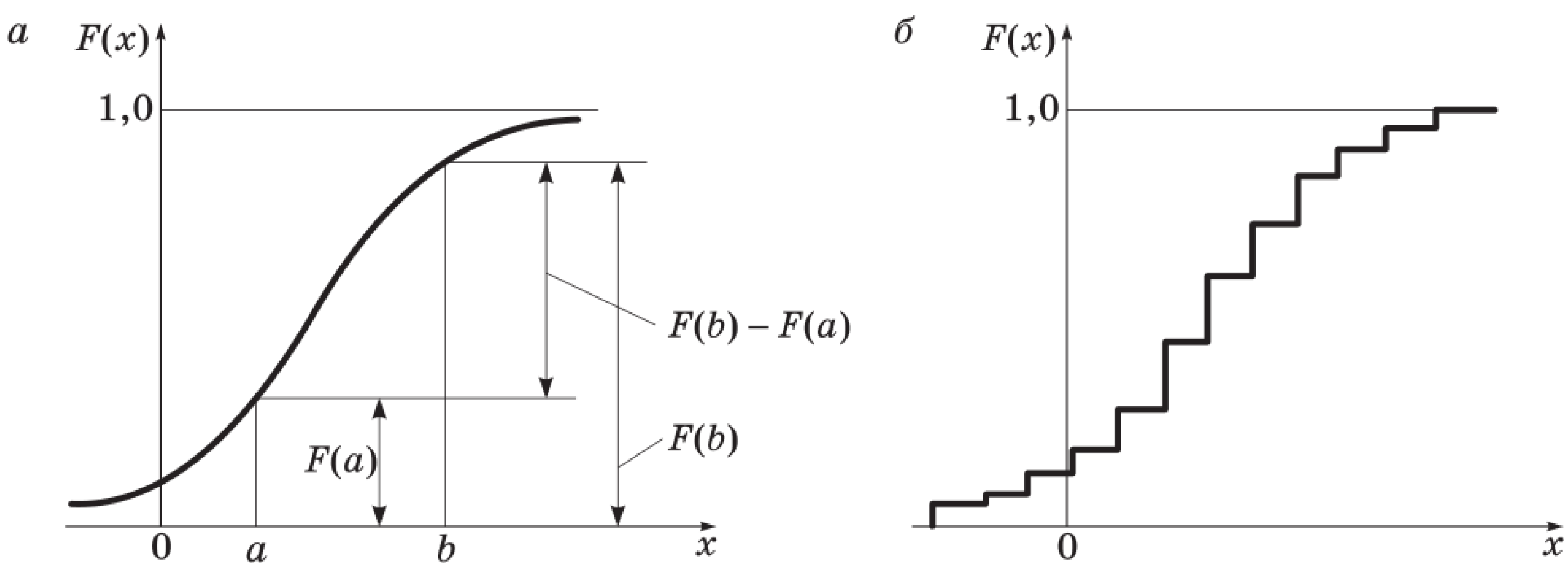
$$\sum_{i=1}^{m} P(A_i) = 1.$$

Функция распределения случайной величины

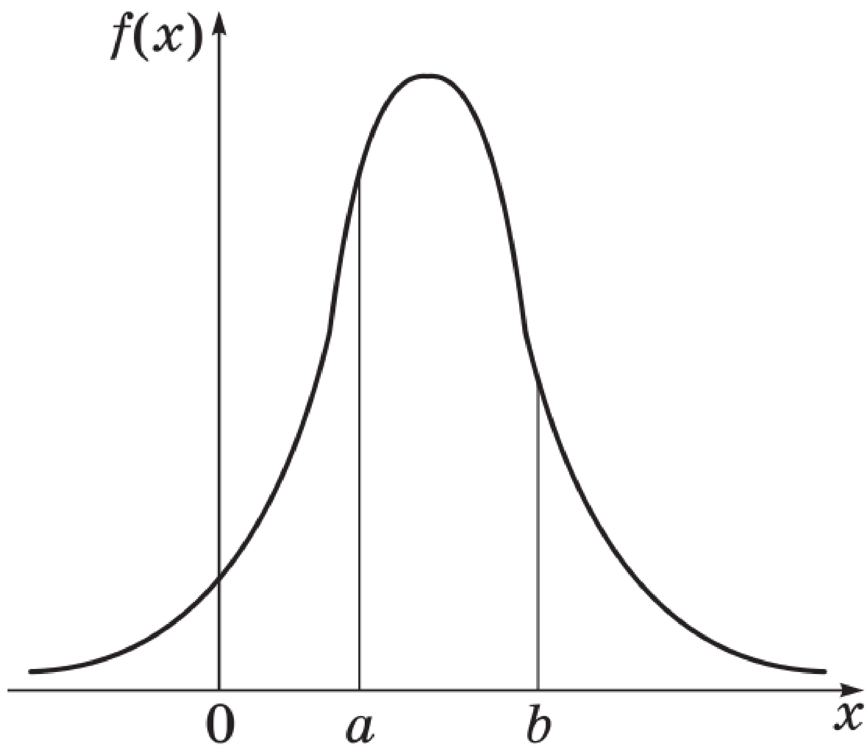
Функция распределения случайной величины F(x,t) определяет вероятность случайного процесса в указанный момент времени t_1 принимать значение меньше некоторого уровня x: F(x)=P(X<x).

Вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $a \le x \le b$, вычисляют

$$P(a < X < b) = F(a) - F(b)$$



Плотность распределения случайной величины



Функция f(x) приближенно равна отношению вероятности попадания случайной величины внутрь интервала $(x, x+\Delta x)$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P[x \leq X \leq x+\Delta x]}{\Delta x}$$

Свойства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

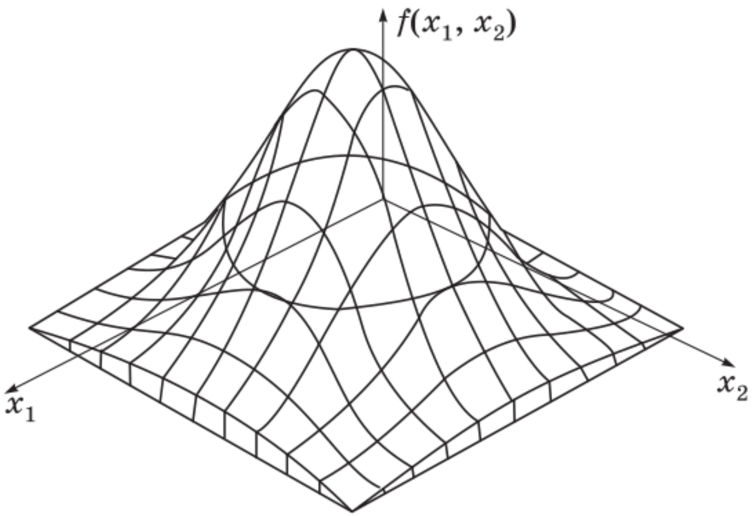
$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x)$$

Совместное распределение вероятности

Пусть t=t_1 и t=t_2 для случайной величины X, тогда

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2]$$

и $f(x_1, x_2) = \partial^2 F(x_1, x_2)/\partial x_1 \partial x_2$



Двухмерная плотность $f(x_1, x_2)$

Свойства

$$f(x_1, x_2) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = F(x_1, x_2)$$

Для определения одной из случайных величин

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \text{ и } f(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1$$

Распределение случайных величин X_1 и X_2 можно рассматривать как *независимое*

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2),$$

или *условное*

$$f(x_1|a_2) = f(x_1|X_2 = a_2) = \frac{f(x_1, a_2)}{f(a_2)},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, a_2) dx_1 = f(a_2) \neq 1.$$

Моменты распределения вероятностей

Начальные,

Центральные,

Различных порядков.

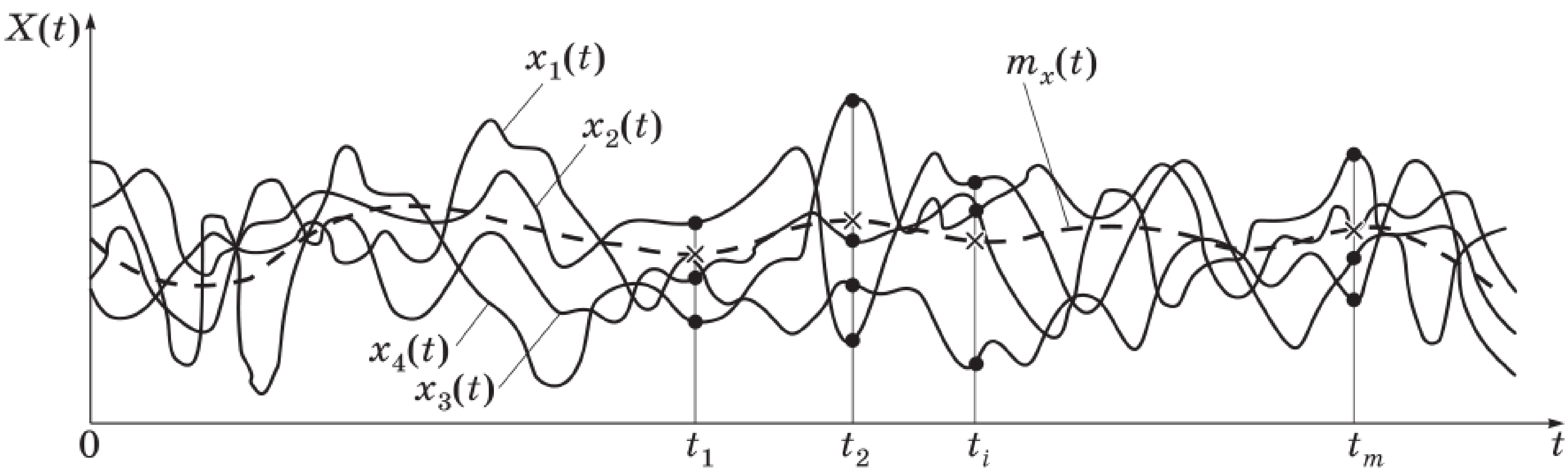
МО

Математическое ожидание случайной величины X – момент первого порядка $m_1(x)$

$$m_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Ковариационная функция случайных величин X_1 и X_2 характеризует степень линейной связи между случайными величинами (смешанный момент второго порядка)

$$m_{11}(x_1, x_2) = \int^{\infty}\int^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$



Дисперсия случайного процесса

Отклонение от случайной величины $\acute{X} = X - m_x$ – случайная величина.

Дисперсия случайной величины X – среднеквадратичное отклонение случайной величины от математического ожидания

$$D(x) = \sigma_x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1(x))^2 f(x) dx$$

Корреляционная функция случайного процесса – статистическая взаимосвязь между значениями случайного процесса в различные моменты времени

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \acute{x}_1(t_1) \acute{x}_2(t_2) f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

Нормированная корреляционная функция – это коэффициент корреляции между случайными величинами

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{R_x(t_1, t_2)}{[\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)]}$$

Если $t_1 = t_2 = t$, то $\rho_x(t, t)_1 = 1$.

Если $\rho_{x_1,x_2} = 0$, то x_1, x_2 – независимые переменные.
Если $\rho_{x_1,x_2} = 1$, тогда $X_2 = aX_1 + b$.

Третий и четвертый центральные моменты

Определяет **асимметрию** графика распределения случайной величины

$$\mu_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \acute{x}^3 f(x)dx, \text{ с коэффициентом асимметрии } A_x = \mu_3(x)/\sigma_x^3.$$

Определяет **степень заостренности** графика распределения случайной величины

$$\mu_4(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \acute{x}^4 f(x)dx, \text{ с коэффициентом эксцесса } \mathrm{E}_x = \frac{\mu_4(x)}{\sigma_x^4} - 3.$$

Взаимная корреляционная функция

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M\left[\acute{X}(t)\acute{Y}\ (t)\right].$$

Характеризует степень связи между сечением процесса $X(t)$ при t=t_1 и сечением процесса $Y(t)$ при t=t_2, несет информацию о фазовом сдвиге t_2- t_1.

Теоретическое распределение вероятностей

Для непрерывных величин:

- **нормальное распределение** (закон Гаусса),
- распределение Пирсона,
- гамма-распределение,
- экспоненциальное распределение.

Для дискретный величин:

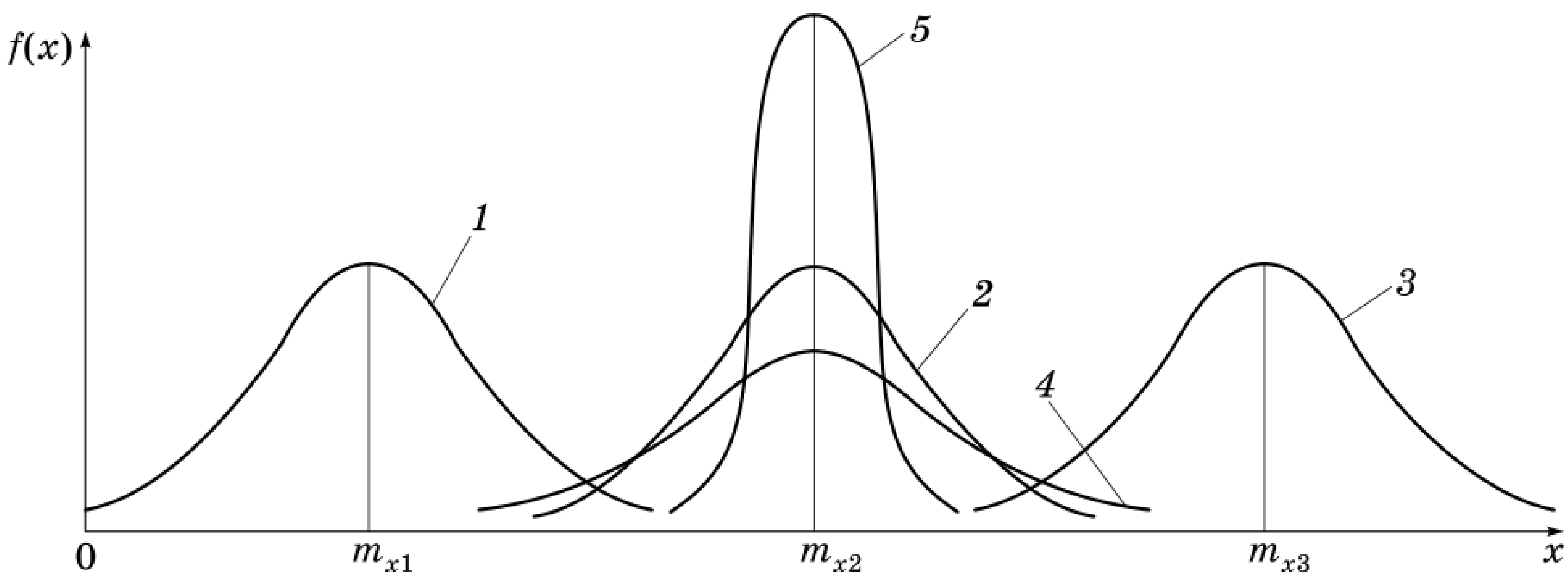
- биномиальное распределение,
- распределение Пуассона.

Нормальное распределение

Для случайной величины X, одномерная плотность определяется выражением

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

где m_x - математическое ожидание, σ_x - среднеквадратичное отклонение, σ_x^2 - дисперсия.



Вероятность попадания случайной величины X в интервал *a*<X<*b*:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$$

где Ф(u) – функция Лапласа, $u_1 = (a - m_x)/\sigma_x$ и $u_2 = (b - m_x)/\sigma_x$.

Отклонение X на величину $\pm 3\sigma_x$

$$P[(m_x - 3\sigma_x) < X < (m_x + 3\sigma_x)] = \Phi(3) - \Phi(-3) \approx 0{,}997.$$

Двумерная плотность вероятности $f(\underline{x},y)$

$$f(x,y)=f(x)f(y)=\frac{1}{2\pi\,\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

где f(x),f(y) – одномерные плотности вероятностей.

Статистический анализ

Определяем объем выборки N и шаг независимой переменной Δt, для непрерывной переменной $\Delta t \leq \pi/(r\omega_x)$, ω_x - частотный спектр случайной величины.

Вся область выборки от x_{max} до x_{min} разбивается на k интервалов

$$k = 1 + 3{,}2 \lg N,$$

определяя $n_j = \overline{1, k}$ число попаданий в интервал элементов выборки.

Эмпирическая оценка плотности вероятности

$$\hat{f}_N(j\Delta x) = \frac{n_j(j\Delta x)}{N\Delta x} = \frac{v_j}{\Delta x}.$$

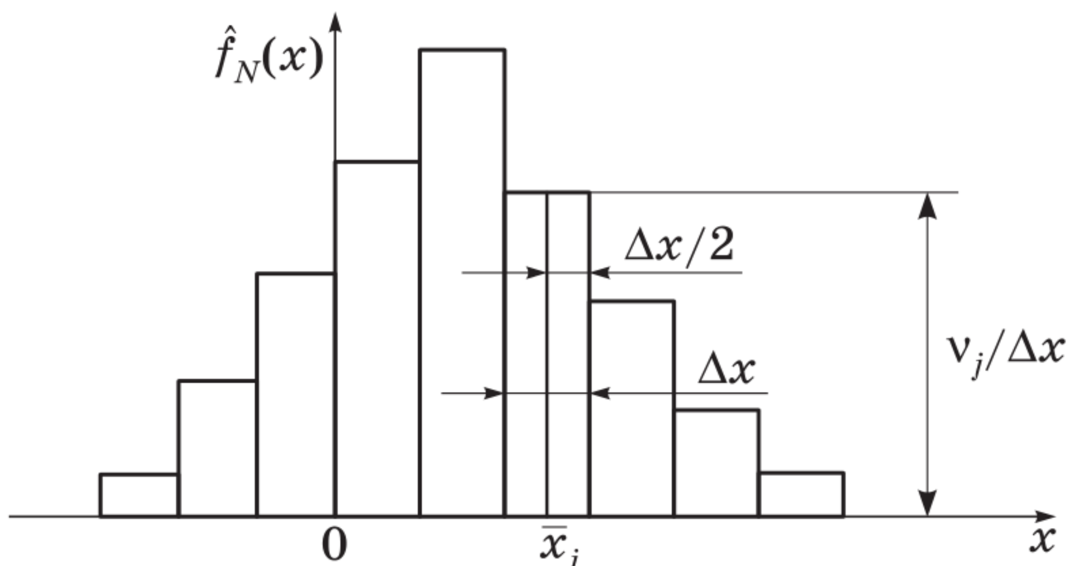
Статистические оценки моментов:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j v_j\ ;$$

$$S_x^2 = \sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_j - \bar{x})^2\, v_j;$$

$$\hat{\mu}_3 = \sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_j - \bar{x})^3\, v_j;$$

$$\hat{\mu}_4 = \sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_j - \bar{x})^3\, v_j.$$

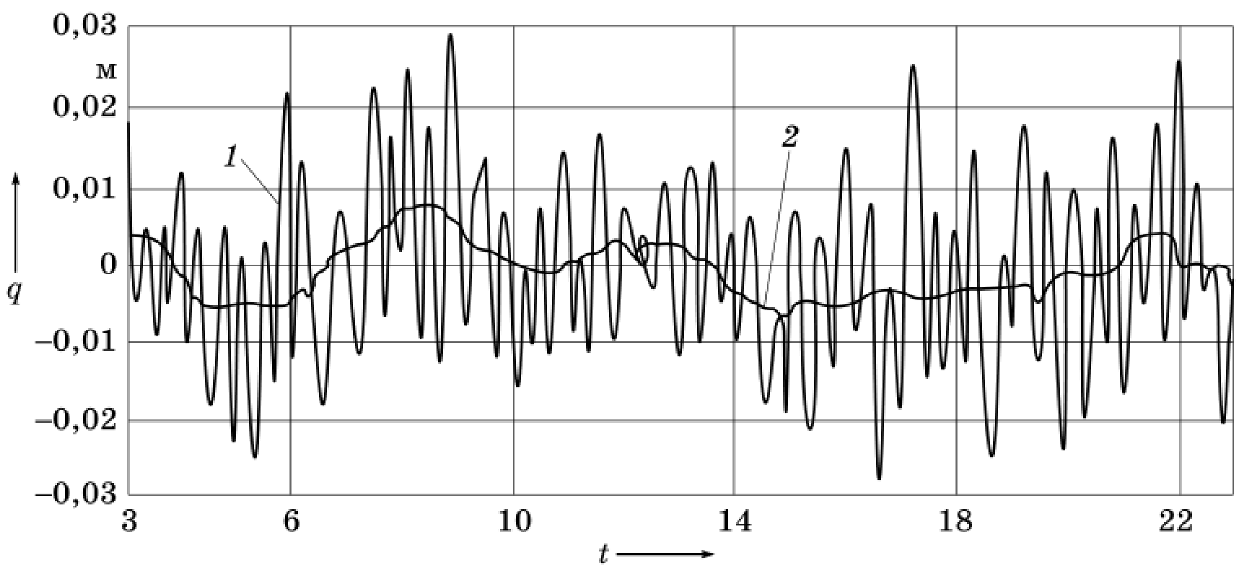


Моделирование

Определить статистические оценки вероятностных характеристик случайных колебательных процессов, возникающих в системе виброзащиты легкового автомобиля при движении по дороге с заданными характеристиками микропрофиля:

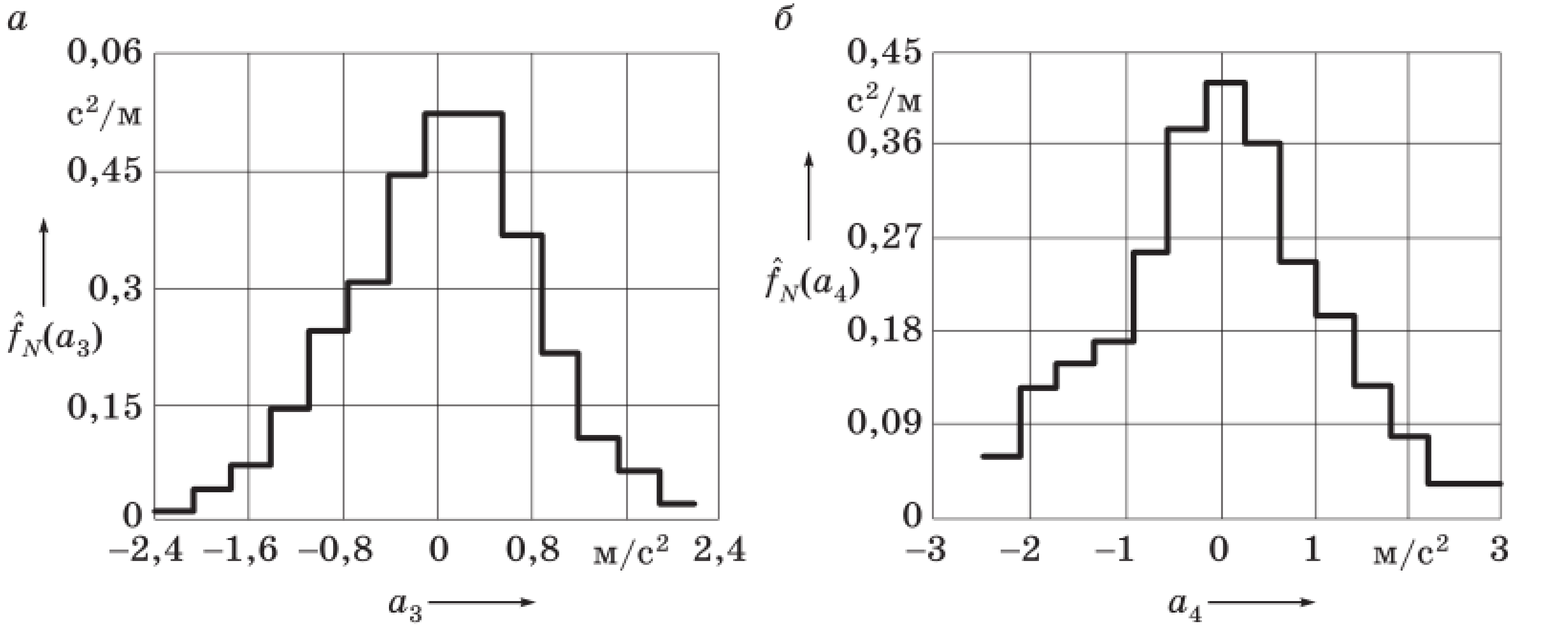
$$R_q(x_s) = \sigma_q^2(A_1 e^{-\alpha_1 x_s} + A_2 e^{-\alpha_2 x_s} cos\beta_2 x_s)$$

σ_q - среднеквадратичное отклонение ординат микрропрофиля,
x_s - интервал сдвига пути: $x_s = \upsilon\tau$ (υ – скорость автомобиля, τ – интервал сдвига по времени).

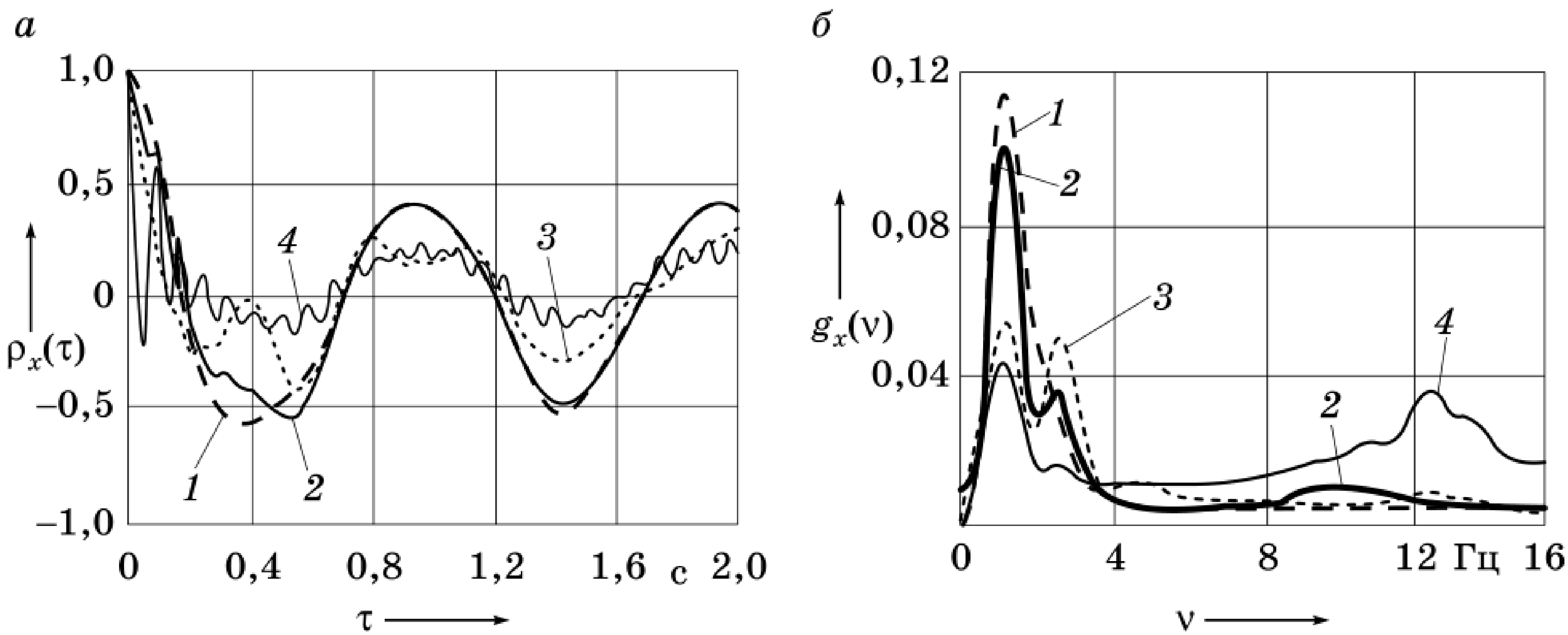


1 – микропрофиль,

2 – текущее среднее

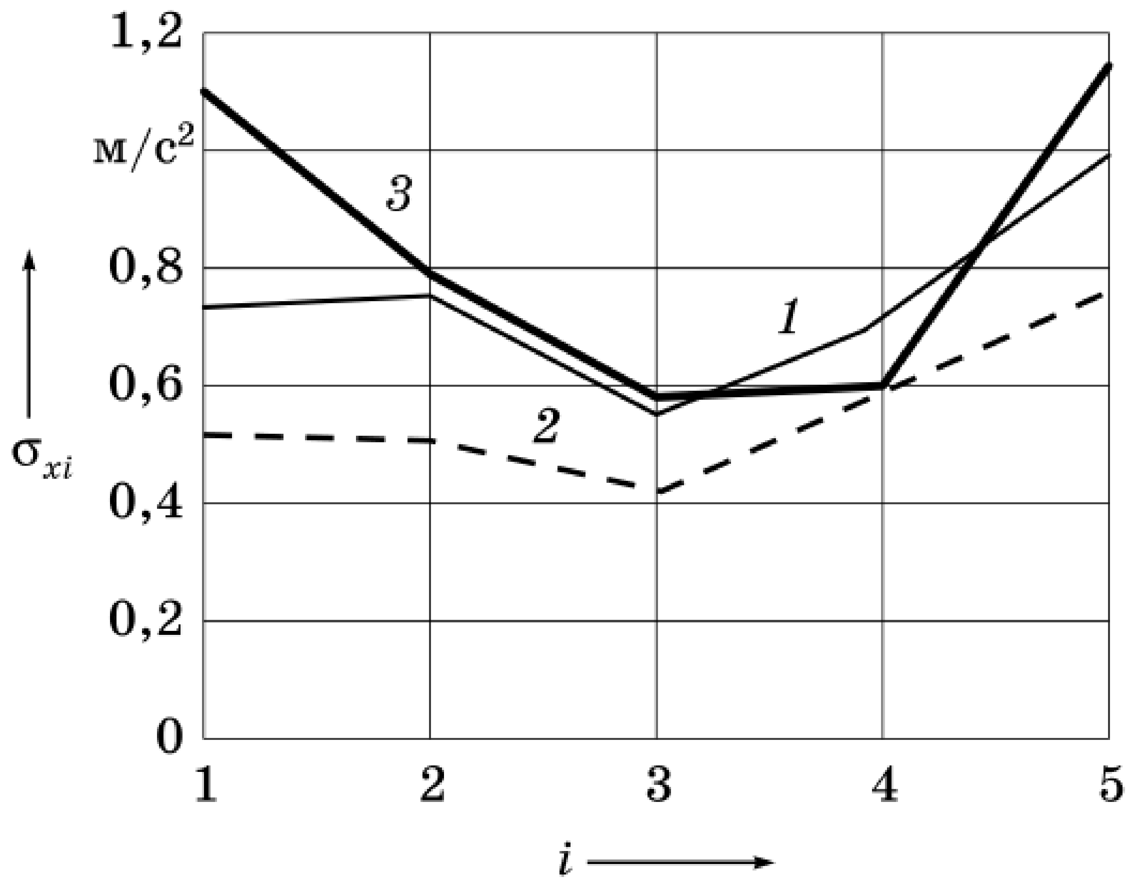


Гистограммы распределения ускорений кузова (а) и водителя (б).



Нормированные корреляционные функции (а) и спектральные плотности (б) случайных процессов: 1 – вертикальные ускорения кузова, 2 – ускорения водителя, 3 – угловые ускорения, 4 – усилия деформации шин.

Среднеквадратичное ускорение в октавах частот



1 – водитель, 2 – кузов,
3 – нормативное по ГОСТ 12.1.012–90 и ISO 2631.