

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Математические модели и моделирование

Лекция 1

преподаватель кафедры ТМСИ

Губин Максим Владимирович

Актуальность

- **Быстрая смена моделей выпускаемой продукции**, с высокими потребительскими требованиями, в условиях жесткой конкуренции на рынке.
- **Короткие сроки и высокое качество** выполнения проектно-конструкторских работ на основе современных методов математического моделирования.
- Современная методология проектирования базируется на **системном подходе**, использующем принципы декомпозиции, иерархичности, итеративности, локальной оптимизации и комплексного осуществления процесса проектирования.
- **Математическое моделирование** технических объектов занимает центральное место в построении эффективной технологии.

Обыденность моделей

1. Планета Нептун была открыта с помощью математического анализа (**Жан Жозеф Леверье**).
2. Модели окружают нас везде (физика, химия, анатомия, русский язык).
3. Всю жизнь мы имеем дело с моделями реальных объектов.

Моделирование – одна из основных категорий теории познания: на идеи моделирования базируется метод научного исследования (теоретического или экспериментального).

Определение

Модель

– это физический или абстрактный **образ моделируемого объекта**, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя **физические свойства и характеристики объекта**.

Модель – это всегда **упрощение**, отображающее основные свойства исследуемого объекта или явления.

Модель – это специальная форма **кодирования** информации об исследуемом объекте или явлении.

Модель содержит потенциальные **знания**.

Свойства моделей

1. Полнота

– степень учета возможных факторов функционирования объекта или протекания процесса, к общему количеству рассматриваемых факторов.

2. Адекватность

– степень соответствия модели объекту-оригиналу по характеристикам, количество которых определяется полнотой.

3. Потенциальность

– это возможность получения новых знаний об исследуемом объекте.

4. Экономичность

– это сочетаемость с затратами на моделирование.

5. Универсальность

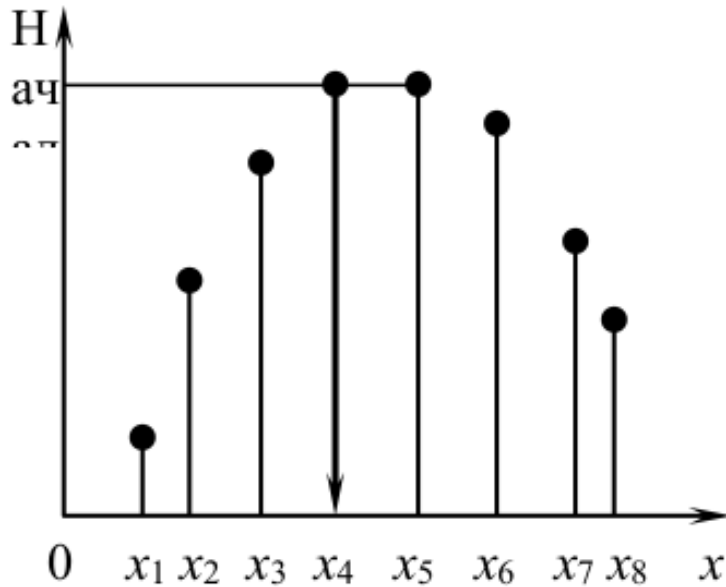
– это сочетаемость применять к широкому классу задач.

Хорошо построенная модель – это компромисс ее свойств. Хорошая модель, как правило, доступнее, информативнее и удобнее для исследования, нежели реальный объект.

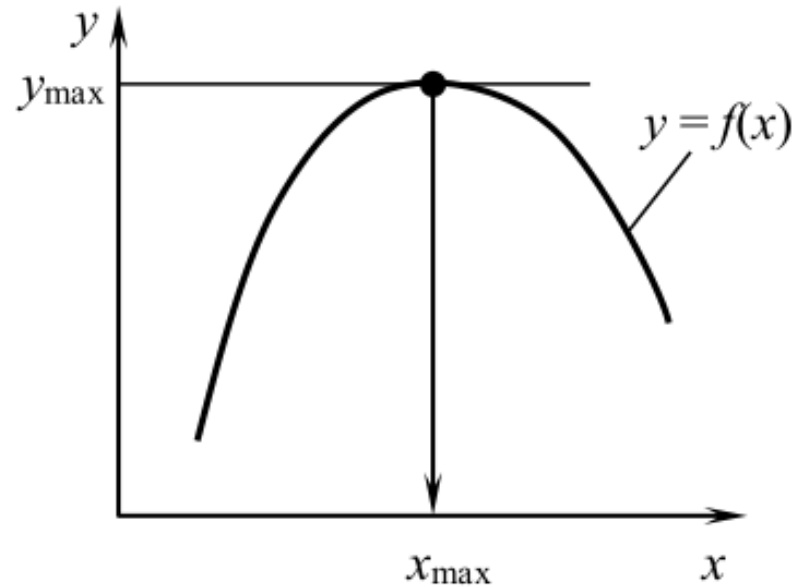
Цели моделирования

1. Модель – средство **познания реального мира**, выявляются основные характеристики объекта, его внутренние и внешние связи.
2. Модель – средство **передачи информации**, средство общения. Никакое вербальное описание не может сравниться по точности, компактности и объективности с моделью.
3. Модель – средство **обучения и тренажа**, обеспечивающее приобретение надежных профессиональных навыков без риска возникновения критической ситуации.
4. Модель – средство **прогнозирования состояния** сложных объектов и процессов, и постановки над ним математических экспериментов.

Найти параметр y для значений x



а

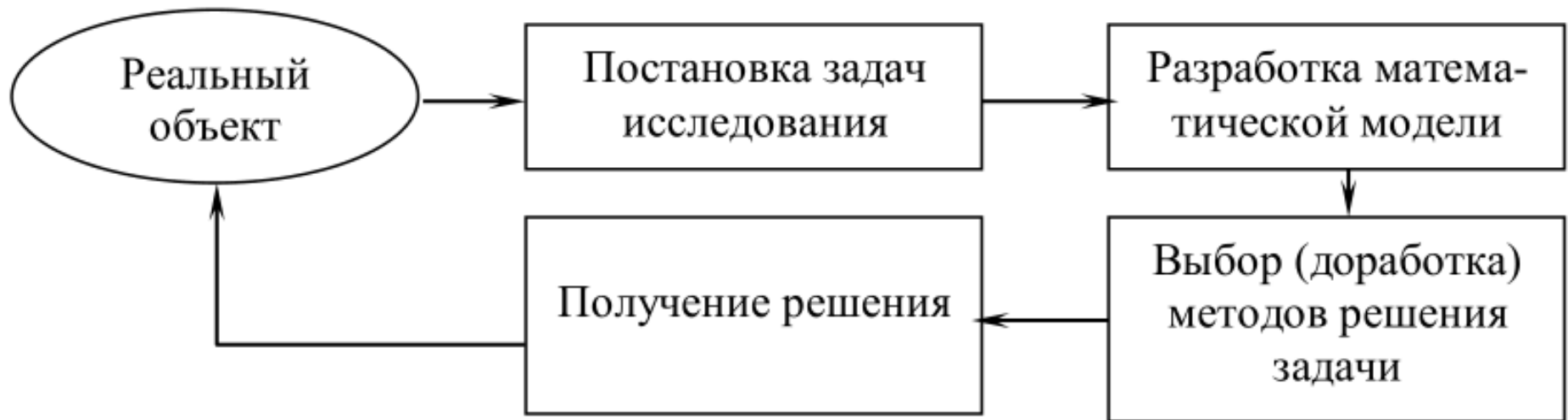


б

а) эмпирический подход к решению задачи.

б) аналитический подход, предполагает знание $y = f(x)$.

Схема применения математической модели



Моделирование

Математическая модель

– это совокупность математических объектов и отношений между ними, адекватно отображающих физические свойства технического объекта.

Процесс построения математической модели называется **математическим моделированием**. А проведение исследований на модели называется **вычислительным экспериментом**. Для вычислительного эксперимента на ЭВМ необходим **алгоритм** реализующий модель.

Достоинство:

быстро и дешево оценить свойства исследуемого процесса или объекта, сами ММ, как правило, имеют высокую универсальность.

Анри Пуанкаре: «Математика – это искусство описывать разные вещи одним и тем же именем.»

ММ позволяют оценить машины, различные по структуре, что редко достижимо даже при физическом эксперименте.

Формализация

– это представление и изучение какой-либо области знания об объекте в виде формальной системы или исчисления (логики).

Используется формализованный язык, выражения этого языка исключают неоднозначность понимания.

Позволяет в дальнейшем просто использовать формализованный инструмент для получения знаний об исследуемом объекте или явлении.

Методология автоматизированного проектирования

базируется на **системном подходе**, где технический объект рассматривается как сложная система, состоящая из взаимосвязанных и целенаправленно функционирующих элементов, находящихся во взаимодействии с окружающей средой.

Использует принципы *декомпозиции, иерархичности, итеративности, локальной оптимизации и комплексного осуществления процесса проектирования*, включающего *функциональный, конструкторский и технологический* аспекты.

Функциональный: принципиальные, функциональные, кинематические, алгоритмические схемы и т.п.

Конструкторский, реализация функционального: размеры и форма деталей, сборочных единиц и т.п.

Технологический, реализация конструкторского: технологические маршруты изготовления деталей, сборки, наладки и технологических испытаний изготавливаемых изделий, осуществляется выбор оборудования, оснастки, инструмента и т.д.

Жизненный цикл технического объекта представляет собой совокупность взаимосвязанных процессов **создания** и последовательного изменения его состояния от формирования исходных требований к объекту до окончания его **эксплуатации**.

Выделяют иерархические уровни проектирования на основе блочного структурирования технического объекта по функциональным признакам. **Например.** Блоки верхнего иерархического уровня автомобиля: двигатель, трансмиссия, ходовая часть и др. В трансмиссию входят блоки: сцепление, коробка передач, карданная передача, главная передача, дифференциал.

ММ элементов и систем

Чем **ниже уровень** иерархии блочного структурирования технического объекта, тем более детальное описание его физических свойств (более **сложные** математические модели).

На более высоких уровнях могут использоваться аппроксимации моделей низших уровней, модели могут быть более простые.

Уравнения в ММ связывают физические величины, характеризующие **состояние объекта**.

Такие величины называют **фазовыми переменными** (фазовыми координатами). Вектор фазовых переменных задает точку в пространстве, называемом **фазовым пространством**.

Фазовые переменные называют **базисными координатами**, если через них можно вычислить все фазовые переменные.

К таким моделям применимы требования *адекватности, экономичности, универсальности*.

Три уровня ММ

Метауровень. Начальная стадия проектирования, осуществляется научно-технический поиск и прогнозирование, разработка концепции и технического решения, **разработка технического предложения.** Используют методы морфологического синтеза, теории графов, математической логики, теории автоматического управления, теории массового обслуживания, теории конечных автоматов.

Макроуровень. Объект проектирования рассматривают как динамическую систему с сосредоточенными параметрами. Математические модели представляют собой **системы обыкновенных дифференциальных уравнений.** Эти модели используют при определении параметров технического объекта и его функциональных элементов.

Микроуровень. Объект представляется как сплошная среда с распределенными параметрами. Для описания процессов функционирования таких объектов используют **дифференциальные уравнения в частных производных.** Проектируют неделимые по функциональному признаку элементы технической системы, называемые **базовыми элементами.** Примерами таких элементов являются рамы, панели, корпусные детали, валы. Проектирование их основано на анализе сложноподвижного состояния.

Виды математических моделей
технических объектов

По форме
представления
ММ

Инвариантные

Алгоритми-
ческие

Аналитические

Графические
(схемные)

По характеру
отображаемых
свойств ТО

Функцио-
нальные

Структурные

По степени
абстрагирования

ММ микроуровня
(с распределенными
параметрами)

ММ макроуровня
(с сосредоточенными
параметрами)

ММ метауровня

По способу
получения ММ

Теоретические

Экспери-
ментальные
факторные

По учету
физических
свойств ТО

Динамические

Статические

Непрерывные

Дискретные

Линейные

Нелинейные

По способности
прогнозирования
результатов

Детермини-
рованные

Вероятностные

Стадии проектирования

ТЗ и ПТ – внешнее проектирование

Остальное – внутренне проектирование направленное на реализацию ТЗ и ПТ

Разработка рабочей документации необходима отчета перед заказчиком

*регламентированы ГОСТ 2.103—2013 и ГОСТ Р 15.301—2016.

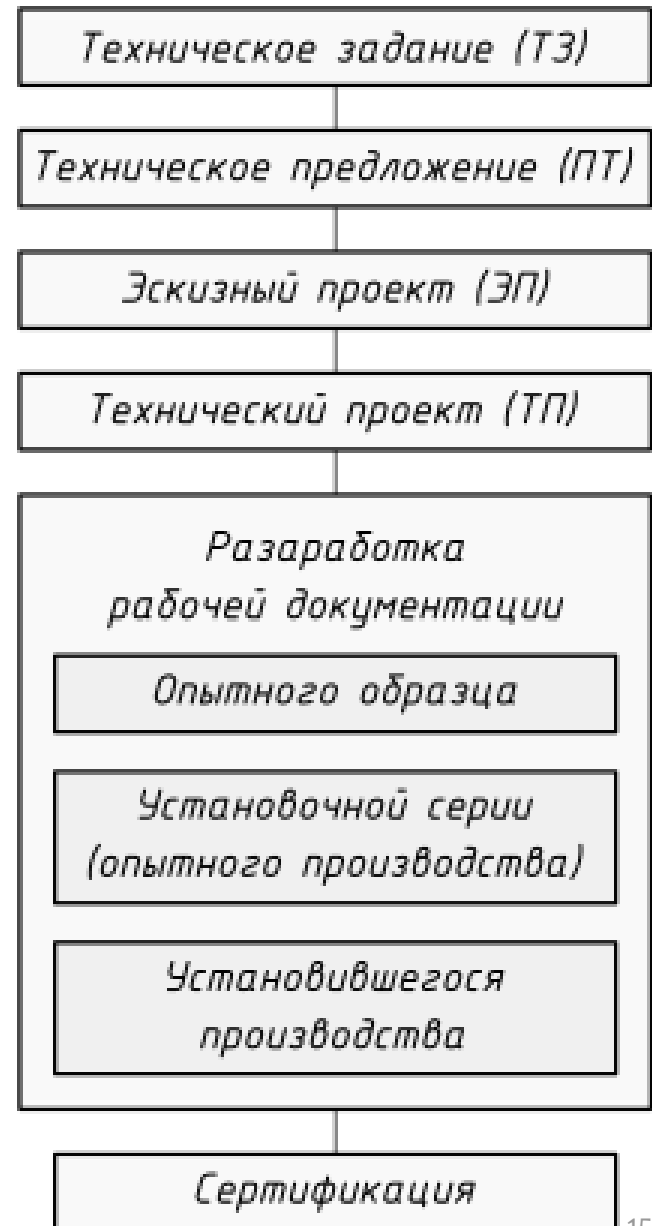


Схема проектирования технического объекта

✱ ...

К-1. Проектирование системы на уровне К-1.

✱ Формирование ТЗ для подсистемы К.

К. Формирование математической модели.

✱ Вычислительный эксперимент.

✱ Анализ результатов эксперимента.

✱ Возможное повторение вычислительного эксперимента для получения удовлетворительных исследуемых параметров.

✱ Оформление технической документации.

✱ Формирование ТЗ для подсистемы К+1.

К+1. Проектирование системы на уровне К+1.

...

ММ проектирования

Определить **структуру** и **внутренние параметры** технического объекта, доставляющие экстремум некоторой скалярной функции $F(\vec{X})$ при заданных ограничениях $\varphi(\vec{X}) > 0, \psi(\vec{X}) = 0$, где \vec{X} – вектор оптимизируемых параметров.

Здесь $F(\vec{X})$ – целевая функция или функция качества.

Процедура **постановки задачи** включает следующие этапы:

- выбор критериев оптимальности,
- формирование целевой функции,
- выбор управляемых (оптимизируемых) параметров,
- назначение ограничений,
- нормирование управляемых и выходных параметров.

Многокритериальность

Приводит к множеству возможных решений.

- ✱ Задача принятия решения: кортеж $\alpha = \langle W, \theta \rangle$,
- ✱ где W – множество вариантов принятия решений задачи,
- ✱ θ – критерий оптимальности.

Если W и θ неизвестны – общая **задача принятия решения**. Это наиболее сложная задача.

Задачу с известным θ называют задачей выбора.

Задачу с известными W и θ – задачей оптимизации.

Раздел математической теории принятия решений в условиях неполной определенности называют **теорией статистических решений**

ММ

$$\vec{Y} = \vec{F}(\vec{X}, \vec{Q}),$$

где $\vec{Y}, \vec{X}, \vec{Q}$ - вектор выходных, внутренних и внешних параметров,

\vec{F} - вектор функция,

$$\vec{Y} = (y_j), j = \overline{1, m},$$

$$\vec{X} = (x_i), i = \overline{1, n},$$

$$\vec{Q} = (q_k), k = \overline{1, l},$$

где m, n, k – число выходных, внутренних и внешних параметров.

$$\varepsilon = \|\vec{\varepsilon}_M\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m \varepsilon_j^2},$$

где ε_j - относительная погрешность по j -му выходному параметру,
 ε – погрешность всей модели.

ММ на микроуровне

- ✿ Объекты рассматриваются как **сплошные среды**, имеющие конечные области определения, выделяемые в трехмерном геометрическом пространстве.
- ✿ Объекты представляют собой **динамические системы** с распределенными параметрами (их также называют непрерывными системами). Функционирование этих систем описывается **дифференциальными уравнениями** в частных производных.
- ✿ **Независимые** переменные – пространственные координаты, время.
- ✿ **Фазовые** переменные – функции независимых переменных.
- ✿ Если фазовые переменные не являются функцией времени, то такие задачи называются **стационарными** (статическое состояние технического объекта).