

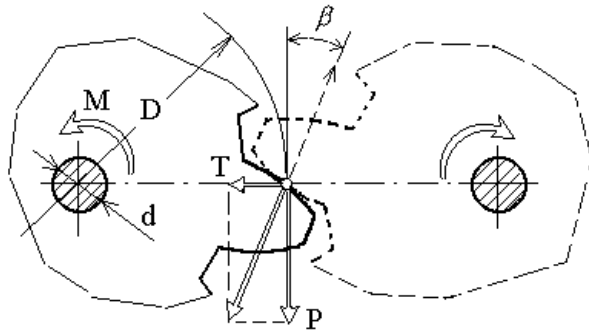
Методическое пособие к заданию №4 "Расчёт вала".

Введение.

Валы (цилиндрические стержни) являются обычными элементами машиностроительных силовых механизмов: редукторов, трансмиссионных передач. Назначение их – передача вращательного движения. При работе механизмов валы одновременно сопротивляются кручению и изгибу.

Расчётная схема.

Вал рассматривается как сплошной с постоянным поперечным сечением по длине. Вал равномерно вращается в шарнирных опорных устройствах. На нём установлены цилиндрические прямозубые колёса (шестерни), находящиеся в зацеплении с другими, не показанными на схеме. Зацепление эвольвентное, давление передаётся под углом  $\beta = 20^0$  и определяется окружной  $P$  и радиальной  $T$  составляющими:



$$P = \frac{M}{D/2}, \quad T = P \cdot \operatorname{tg} \beta .$$

Различают проектный и проверочный (поверочный) расчёт вала.

**Проектный** расчёт осуществляется на стадии проектирования конструкции, когда длина вала не известна. Для начальной компоновки конструкции диаметры валов назначают по конструктивным соображениям или определяют ориентировочно из расчёта на прочность на кручение при заниженных допускаемых напряжениях, поскольку не учитывается изгиб.

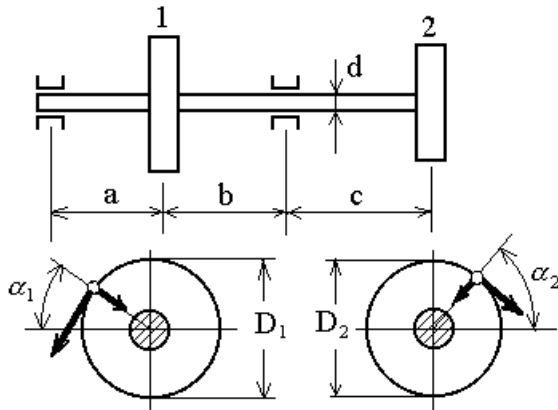
**Проверочный** (уточнённый) расчёт осуществляется после компоновки конструкции, когда известны продольные размеры вала. В результате расчёта должна быть обеспечена статическая и усталостная прочность.

Расчётные значения диаметра вала округляют до стандартных из ряда (размеры в мм): 10, 10,5, ...12; 14...26, 28, 30,...42; 45, 48, 50, 52, 55, 60, 63, 65, 70; 80,...110, 120 и т.д.

*Коэффициент запаса* при статическом действии нагрузки назначается по пределу текучести. Реальный коэффициент должен быть не менее 1,5.

Запас прочности с учётом цикличности напряжений должен, как минимум, превышать 1.0.

Рассмотрим схему №00



Дано:

$$M_1 = 0.5 \text{ кНм},$$

$$D_1 = 0.1 \text{ м}, \quad D_2 = 0.2 \text{ м},$$

$$a = 0.1 \text{ м}, \quad b = 0.15 \text{ м}, \quad c = 0.2 \text{ м},$$

$$\alpha_1 = 30^\circ, \quad \alpha_2 = 90^\circ$$

Сталь 45: (из учебника Г.С. Писаренко, Сопроотивление материалов)

$$\sigma_B = 610 \text{ МПа}, \quad \sigma_T = 360 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{-1} = (250 \div 340) \text{ МПа},$$

$$\tau_{-1} = (150 \div 200) \text{ МПа}$$

### 1. Усилия действующие на вал.

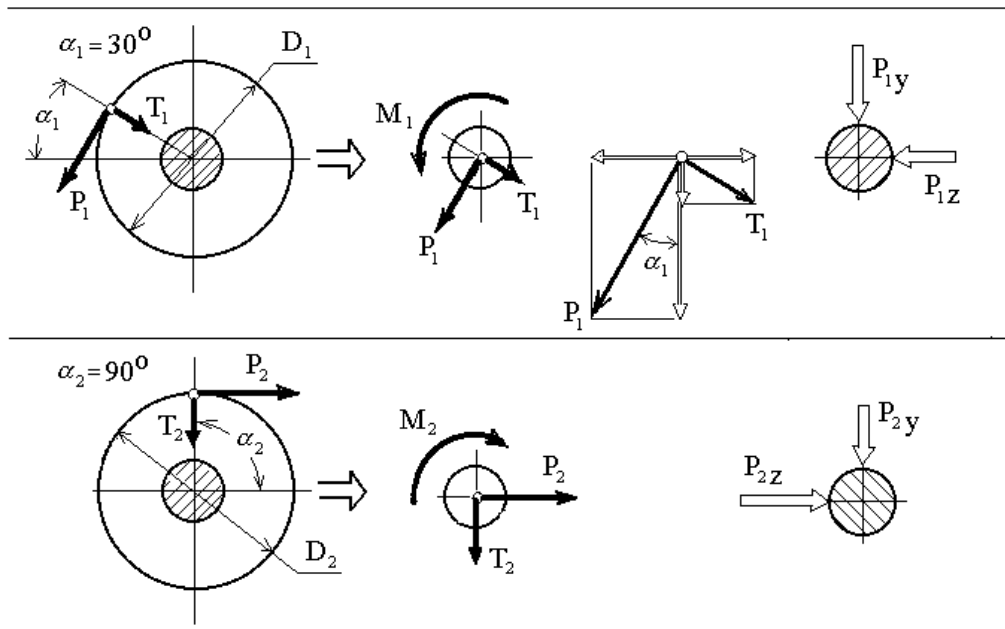
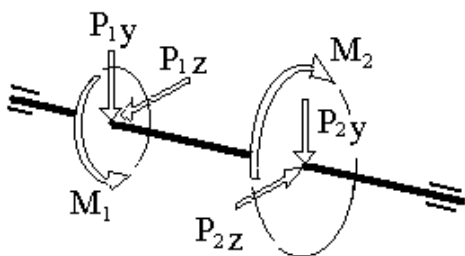


Схема вала под нагрузкой



По уравнению равновесия:

$$\Sigma m_X = M_1 - M_2 = 0,$$

$$M_2 = M_1 = 0.5 \text{ кНм}$$

$$P_1 = \frac{M_1}{D_1/2} = \frac{2 \cdot 0.5}{0.1} = 10 \text{ кН};$$

$$T_1 = P_1 \cdot \text{tg} \beta = 10 \cdot 0.36 = 3.6 \text{ кН}.$$

$$P_2 = \frac{M_2}{D_2/2} = \frac{2 \cdot 0.5}{0.2} = 5 \text{ кН};$$

$$T_2 = P_2 \cdot \text{tg} \beta = 5 \cdot 0.36 = 1.8 \text{ кН}.$$

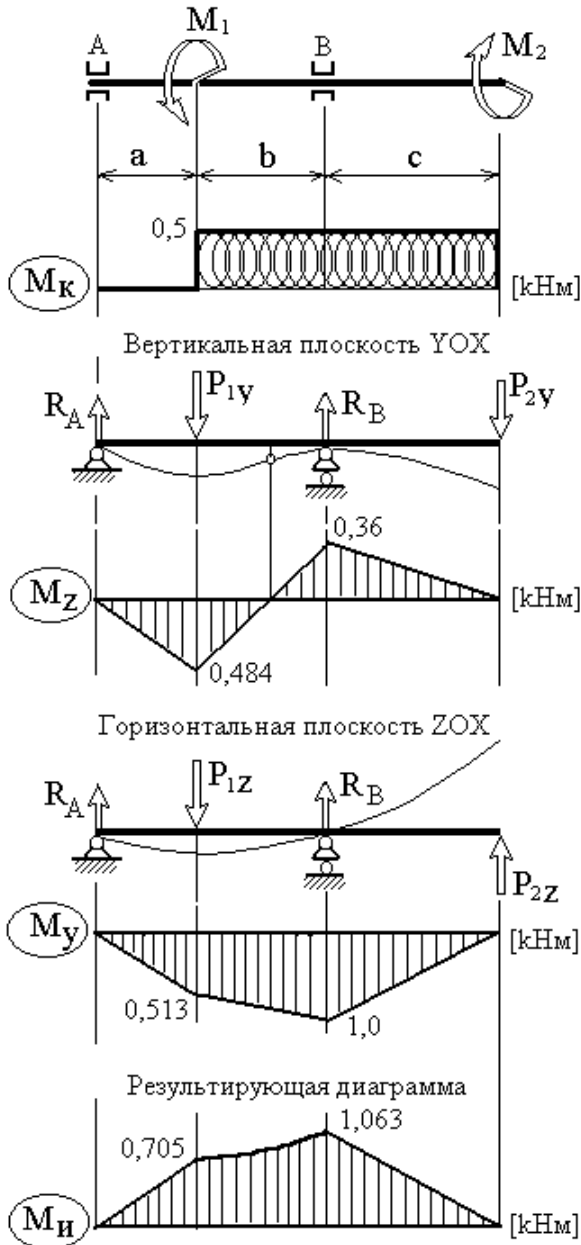
$$P_{1Y} = P_1 \cdot \cos \alpha_1 + T_1 \cdot \sin \alpha_1 = 10 \cdot 0,866 + 3,6 \cdot 0,5 = 10,47 \text{ kH};$$

$$P_{1Z} = P_1 \cdot \sin \alpha_1 - T_1 \cdot \cos \alpha_1 = 10 \cdot 0,5 - 3,6 \cdot 0,866 = 1,88 \text{ kH};$$

$$P_{2Y} = T_2 = 1,8 \text{ kH};$$

$$P_{2Z} = P_2 = 5,0 \text{ kH}.$$

## 2. Диаграммы внутренних усилий:



*Вертикальная плоскость.*

Реакции:

$$\Sigma m_A = R_B(a+b) - P_{1Y} \cdot a - P_{2Y}(a+b+c) = 0;$$

$$R_B = \frac{10,47 \cdot 0,1 + 1,8 \cdot 0,45}{0,1 + 0,15} = 7,428 \text{ kHm}$$

$$\Sigma m_B = R_A(a+b) - P_{1Y} \cdot b + P_{2Y} \cdot c = 0;$$

$$R_A = \frac{10,47 \cdot 0,15 - 1,8 \cdot 0,2}{0,1 + 0,15} = 4,842 \text{ kHm}.$$

Проверка:

$$\Sigma Y = R_A + R_B - P_{1Y} - P_{2Y} = 4,842 + 7,428 - 10,47 - 1,8 = 0$$

*Горизонтальная плоскость.*

Реакции:

$$\Sigma m_A = R_B(a+b) - P_{1Z} \cdot a + P_{2Z}(a+b+c) = 0;$$

$$R_B = \frac{1,88 \cdot 0,1 - 5,0 \cdot 0,45}{0,1 + 0,15} = -8,26 \text{ kHm}$$

$$\Sigma m_B = R_A(a+b) - P_{1Z} \cdot b - P_{2Z} \cdot c = 0;$$

$$R_A = \frac{1,88 \cdot 0,15 + 5,0 \cdot 0,2}{0,1 + 0,15} = 5,13 \text{ kHm}.$$

Проверка:

$$\Sigma Z = R_A + R_B - P_{1Z} + P_{2Z} = 5,13 - 8,26 - 1,88 + 5,0 = 0$$

Результирующая диаграмма изгибающих моментов, в общем пространственная,

строится без указания знаков на плоскости на одной стороне оси по значениям

$$M_Z \text{ и } M_Y: M_H = \sqrt{M_Y^2 + M_Z^2}.$$

В характерных сечениях:  $\sqrt{0,484^2 + 0,513^2} = 0,705 \text{ kHm},$

$$\sqrt{0,36^2 + 1,0^2} = 1,063 \text{ kHm}.$$

### 3. Определение диаметра вала.

Условие прочности формулируем по теории (критерию) наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\tau} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 4\tau_{\text{max}}^2} = \frac{\sqrt{M_H^2 + M_K^2}}{W_Z} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}.$$

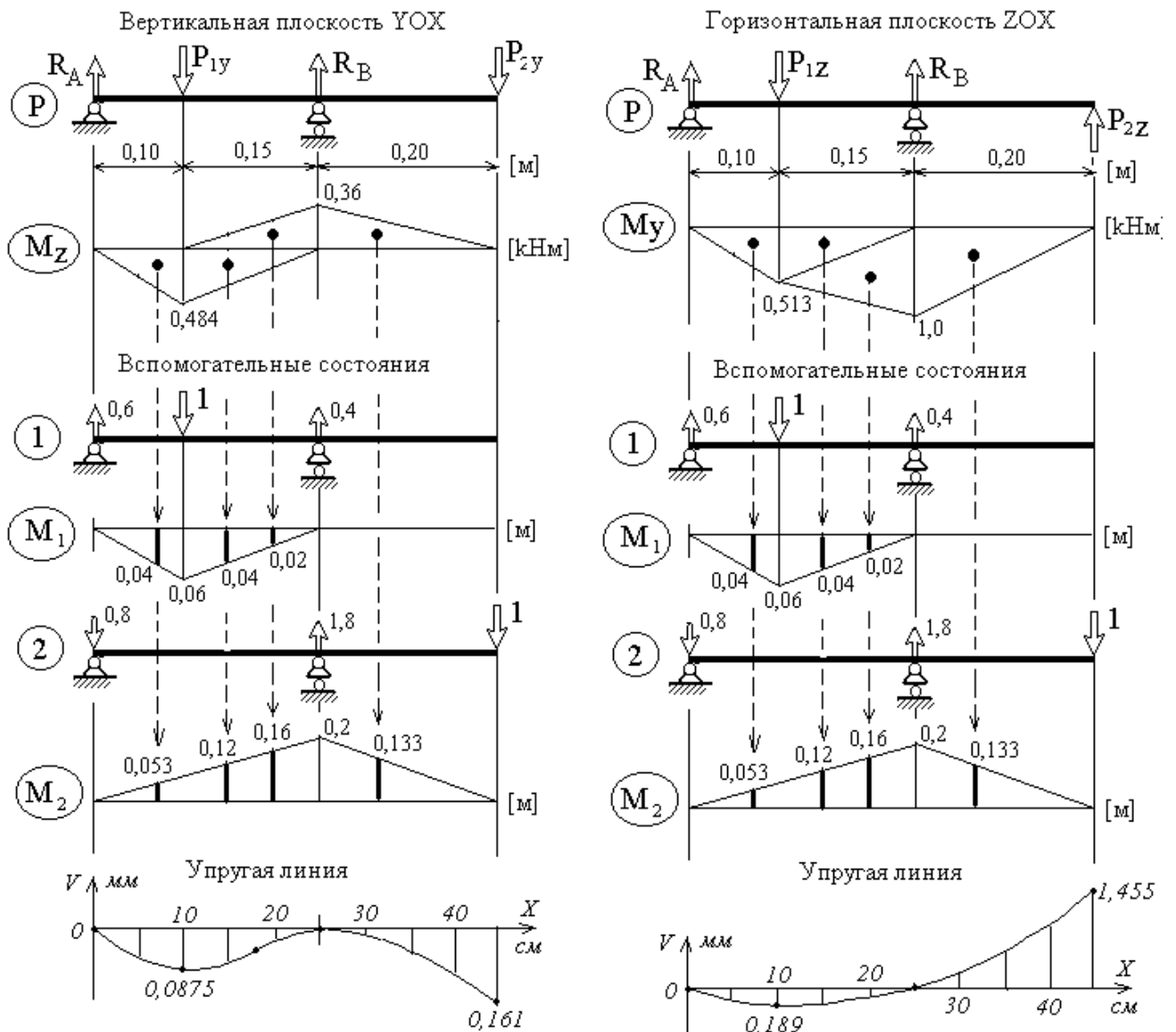
Осевой момент сопротивления поперечного сечения вала и полярный:

$$W_Z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad W_P = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

Назначим коэффициент запаса:  $n = 1,5$ . Из условия прочности находим

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ЭКВ}}}{\pi \cdot \sigma_T / n}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \sqrt{1,063^2 + 0,5^2} \cdot 10^3}{3,14 \cdot (360/1,5) \cdot 10^6}} = 3,79 \cdot 10^{-2} \text{ м. Принимаем } d = 38 \text{ мм.}$$

### 4. Построение упругой (изогнутой) линии вала.



Качественно изобразить упругую линию стержня можно на диаграмме изгибающих моментов, как это показано при построении диаграмм внутренних усилий. Для построения линий необходимо определить перемещения в характерных точках её (сечениях) по способу Верещагина и при графическом представлении соблюдать масштабы по осям.

Диаграммы грузовых состояний разлагаем на их составляющие элементарные площади, значения моментов во вспомогательных состояниях находим из подобия треугольников, определив положение центра тяжести элементарных площадей грузовых состояний.

Вертикальная плоскость:

$$\Delta_{1P} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,484 \cdot 0,1 \cdot 0,04 + \frac{1}{2} \cdot 0,484 \cdot 0,15 \cdot 0,04 - \frac{1}{2} \cdot 0,36 \cdot 0,15 \cdot 0,02}{E \cdot J_Z} = \frac{1,88}{E \cdot J_Z} H \cdot M^3,$$

$$\Delta_{2P} = \frac{-\frac{0,484 \cdot 0,1}{2} \cdot 0,053 - \frac{0,484 \cdot 0,15}{2} \cdot 0,12 + \frac{0,36 \cdot 0,15}{2} \cdot 0,16 + \frac{0,36 \cdot 0,2}{2} \cdot 0,133}{E \cdot J_Z} = \frac{3,47}{E \cdot J_Z} H \cdot M^3$$

Жёсткость стержня на изгиб одинакова в двух плоскостях:

$$EJ_Z = EJ_Y = E \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot \frac{3,14 \cdot 38^4 \cdot 10^{-12}}{64} = 21,49 \cdot 10^3 H \cdot M^2$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1,88}{21,49 \cdot 10^3} = 0,0875 \text{ мм.}, \quad \Delta_{2P} = \frac{3,47}{21,49 \cdot 10^3} = 0,161 \text{ мм.}$$

Горизонтальная плоскость:

$$\Delta_{1P} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,513 \cdot 0,1 \cdot 0,04 + \frac{1}{2} \cdot 0,513 \cdot 0,15 \cdot 0,04 - \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 0,15 \cdot 0,02}{E \cdot J_Z} = \frac{4,065}{E \cdot J_Z} H \cdot M^3,$$

$$\Delta_{2P} = \frac{\frac{0,513 \cdot 0,1}{2} \cdot 0,053 + \frac{0,513 \cdot 0,15}{2} \cdot 0,12 + \frac{1,0 \cdot 0,15}{2} \cdot 0,16 + \frac{1,0 \cdot 0,2}{2} \cdot 0,133}{E \cdot J_Z} = \frac{31,28}{E \cdot J_Z} H \cdot M^3.$$

$$\Delta_{1P} = \frac{4,065}{21,49 \cdot 10^3} = 0,189 \text{ мм.}, \quad \Delta_{2P} = \frac{31,28}{21,49 \cdot 10^3} = 1,455 \text{ мм.}$$

Для стержня постоянного сечения упругие линии можно построить по универсальному уравнению прогибов. В системе осей с началом координат в его левой опоре оно имеет одинаковый вид для вертикальной и горизонтальной плоскостей изгиба:

$$EJ \cdot v = EJ \cdot v_o + EJ \cdot \theta_o \cdot x + \left. \frac{R_A \cdot x^3}{6} \right|_{0 \leq x \leq a} - \left. \frac{P_1 \cdot (x-a)^3}{6} \right|_{a \leq x \leq (a+b)} + \left. \frac{R_B [x-(a+b)]^3}{6} \right|_{(a+b) \leq x \leq (a+b+c)}.$$

Вертикальная плоскость:

$$EJ \cdot v = EJ \cdot v_o + EJ \cdot \theta_o \cdot x + \left. \frac{4,842 \cdot x^3}{6} \right|_{0 \leq x \leq 0,1} - \left. \frac{10,47 \cdot (x-0,1)^3}{6} \right|_{0,1 \leq x \leq 0,25} + \left. \frac{7,428(x-0,25)^3}{6} \right|_{0,25 \leq x \leq 0,45}.$$

Начальные параметры определяются из условий (ограничения перемещений в опорных шарнирных устройствах):

$$1) x = 0: v = v_o = v_A = 0; \quad 2) x = 0,25: v = v_B = 0.$$

Подставляя условие 2) в уравнение, находим:

$$EJ \cdot \theta_0 = \frac{-4,842 \cdot 0,25^3 + 10,47 \cdot 0,15^3}{6 \cdot 0,25} = -26,9 \cdot 10^{-3} \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

Окончательно, уравнение кривой:

$$EJ \cdot v = -26,9 \cdot 10^{-3} \cdot x + \frac{4,842 \cdot x^3}{6} \Big|_{0 \leq x \leq 0,1} - \frac{10,47 \cdot (x-0,1)^3}{6} \Big|_{0,1 \leq x \leq 0,25} + \frac{7,428(x-0,25)^3}{6} \Big|_{0,25 \leq x \leq 0,45}.$$

Из этого уравнения можно определить перемещение любого сечения вала. Например:

$$x = 0,1 \text{ м}, \quad EJ \cdot v = -26,9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 + \frac{4,842 \cdot 0,1^3}{6} = -1,88 \text{ Н} \cdot \text{м}^3;$$

$$x = 0,45 \text{ м},$$

$$EJ \cdot v = -26,9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,45 + \frac{4,842 \cdot 0,45^3}{6} - \frac{10,47 \cdot 0,35^3}{6} + \frac{7,43 \cdot 0,2^3}{6} = -3,47 \text{ Н} \cdot \text{м}^3$$

*Горизонтальная плоскость:*

$$EJ \cdot v = EJ \cdot v_o + EJ \cdot \theta_o \cdot x + \frac{5,13 \cdot x^3}{6} \Big|_{0 \leq x \leq 0,1} - \frac{1,88 \cdot (x-0,1)^3}{6} \Big|_{0,1 \leq x \leq 0,25} + \frac{-8,25 \cdot (x-0,25)^3}{6} \Big|_{0,25 \leq x \leq 0,45}.$$

При тех же граничных условиях:

$$EJ \cdot \theta_0 = \frac{-5,13 \cdot 0,25^3 + 1,88 \cdot 0,15^3}{6 \cdot 0,25} = -49,2 \cdot 10^{-3} \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$EJ \cdot v = -49,2 \cdot 10^{-3} \cdot x + \frac{5,13 \cdot x^3}{6} \Big|_{0 \leq x \leq 0,1} - \frac{1,88 \cdot (x-0,1)^3}{6} \Big|_{0,1 \leq x \leq 0,25} - \frac{8,25(x-0,25)^3}{6} \Big|_{0,25 \leq x \leq 0,45}.$$

$$x = 0,1 \text{ м}, \quad EJ \cdot v = -49,2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 + \frac{5,13 \cdot 0,1^3}{6} = -4,065 \text{ Н} \cdot \text{м}^3,$$

$$x = 0,45 \text{ м},$$

$$EJ \cdot v = -49,2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,45 + \frac{5,13 \cdot 0,45^3}{6} - \frac{1,88 \cdot 0,35^3}{6} - \frac{8,25 \cdot 0,2^3}{6} = 31,3 \text{ Н} \cdot \text{м}^3.$$

## 5. Определение запаса прочности с учётом цикличности напряжений.

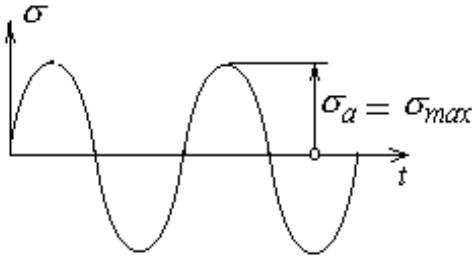
Запас усталостной прочности при плоском напряженном состоянии определяется по двум коэффициентам запаса: по нормальным и касательным напряжениям:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m}, \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(k_\tau)_d \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m}$$

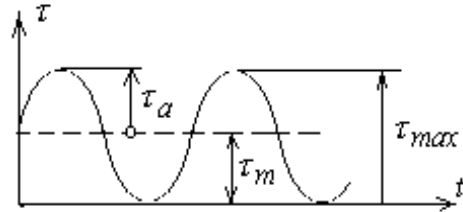
Результирующий коэффициент запаса:

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}.$$

Циклы напряжений:



цикл симметричный ( $r = -1$ )



цикл пульсирующий ( $r = 0$ )

$$\sigma_a = \sigma_{\max} = \frac{M_H \cdot 32}{\pi \cdot d^3} = \frac{1,063 \cdot 10^3 \cdot 32}{3,14 \cdot 38^3 \cdot 10^{-9}} = 197,3 \text{ МПа}, \quad \sigma_m = 0,$$

$$\tau_a = \tau_m = \frac{\tau_{\max}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_K \cdot 16}{\pi \cdot d^3} = \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 8}{3,14 \cdot 38^3 \cdot 10^{-9}} = 23,2 \text{ МПа}.$$

Коэффициенты  $(k_{\sigma})_d$ ,  $(k_{\tau})_d$  отражают общее влияние концентраторов напряжений, размеров поперечного сечения (масштабный фактор), качества поверхностной обработки, которые, в свою очередь, определяются своими коэффициентами. Корректное определение всех этих коэффициентов при отсутствии тщательно проработанного чертежа вала затруднено.

Конструктивно оформленные в чертеже валы обычно имеют ступенчатую форму и коэффициент запаса следует определять для нескольких сечений. Значения соответствующих коэффициентов находятся по графикам и рекомендациям справочных руководств по деталям машин.

Ориентировочно, если известен лишь общий характер конфигурации вала и его обработки, коэффициенты можно определять по приближенным эмпирическим зависимостям. Так, при отсутствии острых концентраторов для детали с чисто обработанной поверхностью, коэффициент концентрации напряжений (Н.В. Беляев, Соппротивление материалов):

$$k_{\sigma} = 1,2 + 0,2 \cdot \frac{\sigma_B - 400}{1100}, \text{ где } \sigma_B \text{ в МПа.}$$

С концентраторами (шпоночные прорези, канавки, отверстия):

$$k_{\sigma} = 1,5 + 1,5 \cdot \frac{\sigma_B - 400}{1100}.$$

Коэффициент, учитывающий масштабный фактор:

$$\varepsilon = 1,2 + 0,1 \cdot (d - 3), \text{ где } d \text{ в сантиметрах}$$

При этом можно принять, что коэффициент качества обработки поверхности:

$$\beta \approx 1,0.$$

Выполняем расчёт в первом приближении, считая, что вал не имеет острых концентраторов:

$$k_{\sigma} = 1,2 + 0,2 \cdot \frac{610 - 400}{1100} = 1,238. \quad \varepsilon = 1,2 + 0,1 \cdot (3,8 - 3) = 1,28, \quad \beta = 1,0.$$

Результирующий поправочный коэффициент:

$$(k_{\sigma})_d = k_{\sigma} \cdot \varepsilon \cdot \beta = 1,238 \cdot 1,28 \cdot 1,0 = 1,585.$$

В первом приближении можно принять:  $(k_{\sigma})_d = (k_{\tau})_d$ .

Коэффициенты приведения несимметричных циклов к симметричным зависят от предела прочности материала (В.И. Феодосьев, Сопротивление материалов) и находятся в диапазоне:

для углеродистых сталей ( $\sigma_B = 370 \div 750 \text{ МПа}$ ):

$$\psi_{\sigma} = 0,1 \div 0,2; \quad \psi_{\tau} = 0,05 \div 0,1.$$

для легированных сталей ( $\sigma_B = 460 \div 1100 \text{ МПа}$ ):

$$\psi_{\sigma} = 0,2 \div 0,3; \quad \psi_{\tau} = 0,1 \div 0,15.$$

Для стали 45:  $\sigma_B = 610 \text{ МПа}$ ,  $\psi_{\sigma} \approx 0,15$ ,  $\psi_{\tau} \approx 0,075$

Коэффициенты запаса:

$$n_{\sigma} = \frac{(250 \div 340)}{1,585 \cdot 197,3 + 0,15 \cdot 0} = 0,799 \div 1,087,$$

$$n_{\tau} = \frac{(150 \div 200)}{1,585 \cdot 23,2 + 0,075 \cdot 23,2} = 3,895 \div 5,193.$$

$$n = \frac{(0,799 \div 1,087) \cdot (3,895 \div 5,193)}{\sqrt{(0,799 \div 1,087)^2 + (3,895 \div 5,193)^2}} = 0,783 \div 1,064.$$

Запас усталостной прочности явно недостаточен. Для его обеспечения можно:

1. использовать более качественный материал,
2. изменить размеры поперечного сечения.
3. одновременно изменить материал и размеры сечения

Рассмотрим два первых варианта.

$$\begin{aligned} 1) \text{ Сталь 45X: } \quad & \sigma_B = 1050 \text{ МПа}, \quad \sigma_T = 850 \text{ МПа}, & \psi_{\sigma} \approx 0,3; \\ & \sigma_{-1} = (400 \div 500) \text{ МПа}, \quad \tau_{-1} = 225 \text{ МПа} & \psi_{\tau} \approx 0,15 \end{aligned}$$

Возрастает чувствительность к концентрации напряжений:

$$k_{\sigma} = 1,2 + 0,2 \cdot \frac{1050 - 400}{1100} = 1,318. \quad (k_{\sigma})_d = k_{\sigma} \cdot \varepsilon \cdot \beta = 1,318 \cdot 1,28 \cdot 1,0 = 1,687.$$

$$n_{\sigma} = \frac{(400 \div 500)}{1,687 \cdot 197,3 + 0,3 \cdot 0} = 1,202 \div 1,502.$$

$$n_{\tau} = \frac{(225)}{1,687 \cdot 23,2 + 0,15 \cdot 23,2} = 5,279.$$

$$n = \frac{(1,202 \div 1,502) \cdot 5,279}{\sqrt{(1,202 \div 1,502)^2 + 5,279^2}} = 1,172 \div 1,445.$$

При этом статический коэффициент запаса:



$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\tau}} = \frac{850}{\sqrt{197,3^2 + 4 \cdot 46,4^2}} = 3,898.$$

2) Увеличим диаметр вала:  $d = 45 \text{ мм}$ .

Изменится масштабный коэффициент:  $\varepsilon = 1,2 + 0,1 \cdot (4,5 - 3) = 1,35$ .

Итоговый поправочный коэффициент

$$(k_{\sigma})_d = k_{\sigma} \cdot \varepsilon \cdot \beta = 1,238 \cdot 1,35 \cdot 1,0 = 1,671.$$

Напряжения уменьшаются:

$$\sigma_a = \sigma_{\text{max}} = \frac{1,063 \cdot 10^3 \cdot 32}{3,14 \cdot 45^3 \cdot 10^{-9}} = 118,8 \text{ МПа}, \quad \sigma_m = 0$$

$$\tau_a = \tau_m = \frac{\tau_{\text{max}}}{2} = \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 8}{3,14 \cdot 45^3 \cdot 10^{-9}} = 13,97 \text{ МПа}.$$

Коэффициенты запаса:

$$n_{\sigma} = \frac{(250 \div 340)}{1,671 \cdot 118,6 + 0,15 \cdot 0} = 1,261 \div 1,716.$$

$$n_{\tau} = \frac{(150 \div 200)}{1,671 \cdot 13,97 + 0,075 \cdot 13,97} = 6,15 \div 8,2.$$

$$n = \frac{(1,261 \div 1,716) \cdot (6,15 \div 8,2)}{\sqrt{(1,261 \div 1,716)^2 + (6,15 \div 8,2)^2}} = 1,235 \div 1,68.$$

Статический коэффициент запаса:

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\tau}} = \frac{360}{\sqrt{118,8^2 + 4 \cdot (2 \cdot 13,97)^2}} = 2,742.$$

Жёсткость стержня при этом повышается

$$EJ_Z = EJ_Y = E \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot \frac{3,14 \cdot 45^4 \cdot 10^{-12}}{64} = 42,27 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

и перемещения уменьшаются в  $\frac{42,27}{21,49} = 1,97$  раз.

Какой вариант предпочтительнее, достаточна ли жёсткость и надёжность? На эти вопросы отвечает инженер создающий конструкцию.